www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

MATHEMATIQUES

(Option agronomie - Option biochimie-biologie)

PREMIERE COMPOSITION

Durée : 3 heures

Les deux parties sont indépendantes.

I. ALGEBRE LINEAIRE

Soit E_3 l'espace vectoriel des polynômes à une indéterminée de degré inférieur ou égal à 3. On définit l'application u de E_3 dans lui même :

$$u : P \longmapsto P + (1 - X) P'$$

où P' est le polynôme dérivé de P et X l'indéterminée.

1) Montrer que u est un endomorphisme de E_3 .

2) Ecrire la matrice de u dans la base de E_3 constituée par :
$e_1 = 1$, $e_2 = X$, $e_3 = X^2$, $e_4 = X^3$.

3) Déterminer une base de $u(E_3)$.

4) Déterminer une base de Ker u .

5) Montrer que $u(E_3)$ et Ker u sont des sous-espaces vectoriels de E_3 supplémentaires.

II. PROBABILITES

Dans tout le problème r et α sont deux paramètres donnés strictement positifs.

1) Montrer que la fonction $f_{r,\alpha}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ donnée par:

$$f_{r,\alpha}(x) = \frac{\alpha\, r^{\alpha}}{x^{\alpha+1}} \qquad \text{pour } x > r$$

$$f_{r,\alpha}(x) = 0 \qquad \text{pour } x \leqslant r$$

est une densité de probabilité. Déterminer la fonction de répartition correspondante.

2) a) Déterminer les valeurs de r et de α pour lesquelles la distribution correspondante a une espérance et dans ce cas la calculer.

b) Même question pour la variance.

3) Soit X une variable aléatoire de densité $f_{r,\alpha}$ et soit

$$Y = \ln \frac{X}{r}$$

Déterminer la fonction de répartition de Y.Commentaire.

4) Soit (Z,T) une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ vérifiant les deux conditions suivantes :

i) conditionnellement à T = t , Z suit une loi uniforme sur l'intervalle [0,t]

ii) T a pour densité (marginale) $f_{r,\alpha}$.

a) Déterminer la densité dans $\mathbb{R}^2$ du couple (Z,T). On précisera avec soin la région du plan où cette densité est strictement positive.

b) En déduire la densité (marginale) de Z.

c) On fixe $z > r$. Déterminer, en fonction de z, la densité de T conditionnellement à Z = z . Calculer la moyenne et la variance de cette loi conditionnelle.

d) Reprendre la question précédente dans le cas où on a fixé $z \leqslant r$.

5) On considère la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$(x,y) \longmapsto \frac{\alpha(\alpha+1)}{(y+x-1)^{\alpha+2}} \quad \text{si } x > 1 \text{ et } y > 1$$

0 sinon .

a) Montrer que c'est une densité.

b) Soit (X,Y) une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ possédant cette densité. Calculer les densités marginales.

c) Dans les conditions du 5.b et si $\alpha > 2$, calculer $E[(X+Y-1)^2]$ et en déduire le coefficient de corrélation de X et Y.

• • •

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail